Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Folgen und Grenzwerte** mit Lösungen
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas
Zunächst behandeln wir das wichtigste Konvergenzkriterium für Folgen:
Folgen, die monoton und beschränkt sind konvergieren.
In manchen Fällen ist es zunächst wichtig, sicherzustellen, dass eine Folge überhaupt konvergiert, bevor man einen Grenzwert errechnen kann (siehe z.B. Aufgaben 4, 5). In anderen Fällen kann man vielleicht gar keinen Grenzwert ermitteln, aber zumindest sicherstellen, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 1 (1) *Monotone Zahlenfolgen I*
Zeigen Sie mithilfe des Monotoniesatzes, dass die Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit

$$a_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

konvergiert.

Lösung.
Zur besseren Handhabung notieren wir die Folge zunächst einmal mit Summenzeichen

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Durch Ausrechnen der ersten Folgenglieder kommt die Vermutung auf: Die Folge ist streng monoton fallend, also es gilt

$$a_n > a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

was wir durch Einsetzen und Umformen verifizieren können.

$$\begin{aligned} & a_n > a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > n(2n+1) + n(2n+2) - (2n+1)(2n+2) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > (2n^2+n) + (2n^2+2n) - (4n^2+6n+2) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > -3n-2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Falls wir nun eine (untere) Schranke für $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ finden, so folgt aus dem Monotoniesatz die Konvergenz. Da die Folge aber für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Summe positiver Zahlen ist, ist sie selbst auch positiv und damit ist 0 eine mögliche (untere) Schranke und folglich $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ konvergent.
Anmerkung: Die Konvergenz an sich sagt noch nichts über den Grenzwert aus, bis auf dessen Existenz. Die Berechnung des Grenzwertes stellt in manchen Fällen (wie z.B. hier) die nächste große Herausforderung dar. □

Aufgabe 2 (2) *Die Leiden des jungen Studierenden*
Ein Student lernt pro Tag drei Seiten des Analysisskriptes auswendig. Über Nacht vergisst er 1% des insgesamt gelernten Wissens.
Gehen Sie davon aus, dass das Skript unendlich viele Seiten hat und die Testperson am ersten Semestertag über kein Wissen aus der Analysis verfügt.

i) Leiten Sie eine (rekursive) Formel für den Wissensinhalt w_n (gemessen in Seiten) der Testperson nach Ablauf von n Tagen und Nächten her.

ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{w_n\}_{n=1,2,...}$ monoton steigt.

iii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{w_n\}_{n=1,2,...}$ nach oben beschränkt ist. (Überlegen Sie sich dazu, ab wie viel Wissen die Testperson mehr Seiten vergisst, als sie am nächsten Tag neu lernt.)

iv) Angenommen, die Testperson hätte eine (wortwörtliche) Ewigkeit studiert. Welche Wissensmenge wird sie erreicht haben? (Grenzwert)

Lösung.

i) $w_0 = 0, w_1 = 3 \cdot \frac{96}{100}, w_2 = (w_1 + 3) \cdot \frac{96}{100}, \dots w_{n+1} = (w_n + 3) \cdot \frac{96}{100}.$

ii) Zu zeigen: $w_{n+1} > w_n$, bzw. $w_{n+1} - w_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Beweis mit vollständiger Induktion nach n.
Induktionsanfang: n = 0

$$w_1 - w_0 = 3 \cdot \frac{96}{100} - 0 > 0$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Es gelte } w_{n+1} - w_n > 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0.$$

Induktionsschritt: $n \Rightarrow n + 1$

$$w_{n+2} - w_{n+1} = (w_{n+1} + 3) \cdot \frac{96}{100} - (w_n + 3) \cdot \frac{96}{100} = \underbrace{(w_{n+1} - w_n)}_{>0 \text{ nach IV}} \cdot \frac{96}{100} > 0$$

iii) Da die Testperson jeden Abend 3% ihres Wissens vergisst und pro Tag 3 Seiten dazugewinnt, müssten 3% der oberen Schranke größer als 3 sein, also für $M \in \mathbb{N}$:

$$M \cdot \frac{3}{100} > 3$$

Auflösen ergibt die vermutete obere Schrank $M = 100$, die wir auch per Induktion nachweisen. Induktionsanfang und -voraussetzung sind ziemlich einfach.
Induktionsschritt: $n \Rightarrow n + 1$

$$w_{n+1} = (w_n + 3) \cdot \frac{96}{100} \overset{IV}{\leq} (100 + 3) \cdot \frac{96}{100} = 98.88 \leq 100$$

iv) Da wir aus ii) und iii) mit dem Monotoniesatz um die Konvergenz unserer rekursiven Folge wissen, lässt sich deren Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w \in \mathbb{R}$ leicht berechnen mit

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} ((w_{n-1} + 3) \cdot \frac{96}{100}) = (\lim_{n\to\infty} (w_{n-1} + 3)) \cdot \frac{96}{100} = (w + 3) \cdot \frac{96}{100}$$

und Umstellen liefert

$$\lim_{n\to\infty} w_n = w = 72$$

□

Aufgabe 3 (2) *Frosch und Kröte*
Ein Frosch und eine Kröte sind in einen 50 Meter tiefen Brunnen gefallen. Jeden Tag klettert der Frosch 32 Meter hoch, und ruht sich über Nacht aus. Während der Nacht rutscht er $\frac{2}{3}$ seiner Höhe (vom Boden) hinab. Die Kröte klettert täglich 13 Meter vorm Ausruhen. Nachtsüber rutscht sie $\frac{1}{4}$ ihrer Höhe (vom Boden) hinab.
Bestimmen Sie, wer von den beiden entkommt und jeweils nach wie viel Tagen die Flucht gelungen ist.

Lösung.
Sei f_n die Kletterhöhe die der Frosch nach n Tagen erreicht hat, also

$$f_0 = 0, f_1 = 32 \cdot \frac{1}{3}, f_2 = (f_1 + 32) \cdot \frac{1}{3}, \dots, f_n = (f_{n-1} + 32) \cdot \frac{1}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

und analog k_n die Kletterhöhe der Kröte nach n Tagen

$$k_0 = 0, k_1 = 13 \cdot \frac{3}{4}, k_2 = (k_1 + 13) \cdot \frac{3}{4}, \dots, k_n = (k_{n-1} + 13) \cdot \frac{3}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mit Induktion beweisen wir wieder, dass beide Folgen streng monoton steigen, also dass $\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} - f_n > 0 \wedge k_{n+1} - k_n > 0$ gilt.
Induktionsanfang: n = 0

$$f_1 - f_0 = (f_1 + 32) \cdot \frac{1}{3} - 0 = \frac{32}{3} > 0$$
$$k_1 - k_0 = (k_0 + 13) \cdot \frac{3}{4} - 0 = \frac{39}{4} > 0$$

Induktionsvorraussetzung:
Die Behauptungen gelten jeweils für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: $n \Rightarrow n + 1$

$$f_{n+2} - f_{n+1} = (f_{n+1} + 32) \cdot \frac{1}{3} - (f_n + 32) \cdot \frac{1}{3} = \underbrace{(f_{n+1} - f_n)}_{>0 \text{ nach IV}} \cdot \frac{1}{3} > 0$$
$$k_{n+2} - k_{n+1} = (k_{n+1} + 13) \cdot \frac{3}{4} - (k_n + 13) \cdot \frac{3}{4} = \underbrace{(k_{n+1} - k_n)}_{>0 \text{ nach IV}} \cdot \frac{3}{4} > 0$$

Genauso wie in der vorherigen Aufgabe können wir jetzt wieder für obere Schranken überlegen, wann der Teil, den beide nachts herunterrutschen größer wird als das, was sie am Tag hochklettern. Es ergeben sich aus

$$M_f \cdot \frac{2}{3} > 32, \quad M_f \in \mathbb{N}$$

$$M_k \cdot \frac{1}{4} > 13, \quad M_k \in \mathbb{N}$$

obere Schranken $M_f = 48$ und $M_k = 52$, die wir wieder per Induktion nachweisen.
Damit folgt, dass der Frosch nicht über 48 Meter hinaus kommt und dadurch den Brunnen niemals verlassen wird. Die Kröte könnte allerdings noch entkommen, daher berechnen wir den Grenzwert seiner Höhe mit

$$k = \lim_{n\to\infty} k_n = \lim_{n\to\infty} (k_{n-1} + 13) \cdot \frac{3}{4} = (k + 13) \cdot \frac{3}{4}$$

und erhalten $k = 39$, und da die Folge streng monoton steigend ist wird auch dieser Wert niemal übersprungen, daher hängen beide mit dieser Strategie ewig in dem Loch fest.
[Zusatz: Wie kann man die Aufgabe anpassen, damit beide nach endlich vielen Sprüngen entkommen könnten?] $\square$

Aufgabe 4 (2-3) *Monotone Zahlenfolgen II*
Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Zahlenfolge $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ folgendermaßen rekursiv definiert

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

für $0 < x_1 < \frac{1}{a}$ beliebig.

i) Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Hinweis: Quadratische Ergänzung!)

ii) Zeigen Sie, dass außerdem $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Hinweis: Verwenden Sie i).)

iii) Begründen Sie, dass $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ konvergiert und bestimmen sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Lösung.
Sei alles wie in der Aufgabenstellung definiert.

i) Ein Beweis per Induktion ist möglich, aber schneller zeigen wir mit dem Tipp

$$\frac{1}{a} - x_{n+1} = \frac{1}{a} - (2x_n - ax_n^2) = a\left(x_n^2 - \frac{2}{a}x_n + \frac{1}{a^2}\right) = a\left(x_n - \frac{1}{a}\right)^2 \overset{a>0, Quadrate \geq 0}{\geq} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \geq x_{n+1}.$$

ii) Hier kommen wir um Induktion nicht herum.
Induktionsanfang: n = 1

$$x_1 \overset{Vor.}{>} 0 \geq 0$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2 = x_n(2 - ax_n) \overset{IV}{\geq} 0$$

Wobei wir für die letzte Abschätzung noch $2 - ax_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen müssen.
Mit i) folgt dies für x_{n+1} mit

$$\frac{1}{a} - x_{n+1} \geq 0 \quad \overset{a>0}{\Leftrightarrow} \quad 1 - ax_{n+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - ax_{n+1} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wobei die Ungleichung für x_1 separat nachgewiesen werden muss

$$2 - ax_1 \overset{Vor.}{\geq} 2 - a\frac{1}{a} = 1 \geq 0.$$

iii) Die Beschränktheit von $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ ist mit i) und ii) nachgewiesen. Außerdem ist die Folge monoton steigend, denn es gilt

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n - ax_n^2 - x_n = x_n(1 - ax_n) \overset{i),ii)}{\geq} 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

Damit folgt die Konvergent der Folge aus dem Monotoniesatz. Den Grenzwert berechnen wir aus

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2x_n - ax_n^2 = 2x - ax^2$$

Dies entspricht einer quadratischen Gleichung mit den Lösungen $\left\{0, \frac{1}{a}\right\}$. Da das erste Folgenglied x_0 aber nach Voraussetzung positiv ist und die Folge monoton steigt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{a}$$

□

Aufgabe 5 (3) *Monotone Zahlenfolgen III*
Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit

$$a_1 = b, \qquad a_{n+1} := \frac{|a_n|}{2a_n - 1}.$$

i) Unter der Annahme der Konvergenz, gegen welche Grenzwerte kann die Folge dann konvergieren?

Wir wählen nun als mögliche Startwerte $b = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$.

ii) Für welchen der beiden Startwerte ist die Folge monoton?

iii) Für welchen der beiden Startwerte ist die Folge beschränkt?

iv) Begründen Sie, ob die Folgen für die genannten Anfangswerte konvergieren und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte.

Lösung. Sei alles definiert wie in der Aufgabenstellung.

i) Angenommen die Folge konvergiere gegen einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{2a_n - 1} = \frac{|a|}{2a - 1}$$

Wir erhalten eine quadratische Gleichung mit Beträgen (vgl. Kapitel “Betrag”). Wir betrachten die Fälle $a \geq 0$ und $a \leq 0$ getrennt und erhalten die Menge der möglichen Grenzwerte $\{0, 1\}$ noch unabhängig vom Startwert.

ii) Für $b = -\frac{1}{4}$ ist die Folge streng monoton steigend (Beweis durch Induktion).
für $b = \frac{1}{4}$ ist $a_1 = b = \frac{1}{4} > a_2 = -\frac{1}{2} < a_3 = -\frac{1}{4}$, also ist die Folge nicht monoton (auf ganz $\mathbb{N}$).

iii) Da wir für $b = -\frac{1}{4}$ vom Startwert an in jedem Schritt eine positive Zahl (den Betrag im Zähler) durch eine negative Zahl (Nenner) teilen, ergibt sich 0 als vermutete obere Schrank, die wir per Induktion nachweisen.
Für $b = \frac{1}{4}$ ist $a_2 = -\frac{1}{2}$ und mit demselben Argument müssen alle späteren Folgenglieder negativ sein. Außerdem ist mit demselben Argument wie in ii) die Folge ab diesem Folgenglied streng monoton steigend, also die Folge insbesondere durch $\frac{1}{2}$ beschränkt.

iv) Nach dem Monotoniesatz konvergiert die Folge für beide Startwerte.
Für $b = -\frac{1}{4}$ gilt laut il), dass alle Folgenglieder negativ sind, also ergibt sich als Grenzwert nur die 0.
Für $b = \frac{1}{4}$ ist die Folge ab dem Folgenglied $a_3 = -\frac{1}{4}$ identisch mit der Folge für den negativen Startwert und konvergiert damit gegen denselben Grenzwert, nämlich 0.

□

Wir definieren für die Rechenaufgaben in diesem Dokument für eine Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ die uneigentlichen Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty :\Leftrightarrow \{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \text{ ist streng monoton steigend und unbeschränkt.}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty :\Leftrightarrow \{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \text{ ist streng monoton fallend und unbeschränkt.}$$

Außerdem gilt bei der Berechnung von Grenzwerten für alle $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\pm\infty}{c} = \frac{c}{0} = \pm\infty$$

Zunächst einige typische Berechnungsaufgaben für Grenzwerte.

Aufgabe 6 (1-2) *Grenzwerte von Folgen I*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n}{3n^2+5}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+1}}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n^2}{3n^4+4}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+2^{-n}}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n}-1}{2^{3n}-3^{2n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\sqrt{n}+7n+5}{3n^2}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2^n}{n^2-2^n}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+3n^9-7}{n^n+3n^9+7}$

Lösung.

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\dfrac{5}{n^2})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2}{3n^4+4} = 0$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n\sqrt{n}+7n+5}{3n^2} = 0$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0}} = 1$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+2^{-n}} = \infty$, da

$$\frac{2n^2}{n+2^{-n}} = \frac{2n^2}{n+\frac{1}{2^n}} = \frac{2}{\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{0+0} = \infty$$

f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{n^2-2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{2^n}+1}{\frac{n^2}{2^n}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

g) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-2^{-n}}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2^{-2n}}{1-2^{-n}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

h) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}-1}{2^{3n}-3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n-1}{8^n-9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^n - 9^{-n}}{\left(\frac{8}{9}\right)^n - 1} = \frac{0-0}{0-1} = 0$$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n! + 3n^9 - 7}{n^n + 3n^9 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n^n} + 3n^{9-n} - 7n^{-n}}{1 + 3n^{9-n} + 7n^{-n}} = \frac{0+0-0}{1+0+0} = 0$

□

Aufgabe 7 (2) *Grenzwerte von Folgen II*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Zahlenfolgen konvergieren oder divergieren und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

a) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$

b) $\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right\}_{n=1,2,\ldots}$

c) $\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1,2,\ldots}$

d) $\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}_{n=1,2,\ldots}$

Lösung.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right)$$

$$\overset{c)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

□

Ab hier finden Sie wichtige Aussagen für den Umgang mit und die Berechnung von Grenzwerten. Für ein grundlegendes Verständnis des Themas (wie es in den ersten Semestern des Mathematikstudiums vollkommen ausreichend ist) ist es nicht wichtig, die folgenden Beweise selbst und ohne Hilfe führen zu können. (Was nicht heißt, dass es unmöglich ist. Versuchen Sie sich trotzdem!)
Die Aussagen dieser Sätze zu kennen oder zumindest "schon einmal gehört zu haben" wird allen Studierenden allerdings nahegelegt.
Zu Beginn wird der Begriff der Nullfolge, auf dem die Definition des Grenzwertes einer Folge fußt noch einmal aufgegriffen. Danach folgen wichtige Sätze für deren Berechnung sowie grundlegende Grenzwerte deren Kenntnis nützlich für Abschätzungen ist.

Aufgabe 8 (2) *Nullfolgen*
Welche der hier aufgeführten Folgen sind rationale Nullfolgen? Beweisen bzw. widerlegen Sie mithilfe der Definition:

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\dots}$

b) $\left\{\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1,2,\dots}$

c) $\left\{\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right\}_{n=1,2,\dots}$

d) $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}_{n=1,2,\dots}$, $k \in \mathbb{N}$

e) $\left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}_{n=1,2,\dots}$

f) $\left\{\frac{n+1}{n^4+n}\right\}_{n=1,2,\dots}$

g) $\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right\}_{n=1,2,\dots}$, $k \in \mathbb{N}$

Lösung.
Zur Erinnerung: Eine Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\dots} \subseteq \mathbb{Q}$ rationaler Zahlen heißt (rationale) Nullfolge falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

bzw. anders notiert

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n| < \varepsilon$$

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\dots}$ ist eine rationale Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so erfüllt $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die gewünschte Eigenschaft:

$$\left|\frac{1}{n}\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{1}{n} \overset{n \geq N(\varepsilon)}{\leq} \frac{1}{N(\varepsilon)} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

b) $\left\{\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1,2,\dots}$ ist auch eine rationale Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so erfüllt $N(\varepsilon) > \frac{1}{4\varepsilon}$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die gewünschte Eigenschaft:

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}\right| = \left|\frac{1}{4n+2}\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{1}{4n+2} < \frac{1}{4n} \overset{n \geq N(\varepsilon)}{\leq} \frac{1}{4N(\varepsilon)} < \frac{1}{4\frac{1}{4\varepsilon}} = \varepsilon.$$

c) $\left\{\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right\}_{n=1,2,\dots}$ ist keine rationale Nullfolge. Dafür müssen wir die Negation der obigen Aussage nachweisen, also:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : |a_n| \geq \varepsilon$$

bzw. äquivalent dazu (da es zu jeder natürlichen Zahl N immer eine größere n gibt)

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \geq \varepsilon$$

In diesem Fall erfüllt $\varepsilon = 1$ diese Eigenschaft, denn

$$\left|\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{(n+1)^2}{n^2+1} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+1} \overset{n\geq 0}{\geq} \frac{n^2+1}{n^2+1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

d) $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist eine rationale Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so erfüllt $N(\varepsilon) > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die gewünschte Eigenschaft:

$$\left|\frac{1}{n^k}\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{1}{n^k} \overset{n\geq N(\varepsilon)}{\leq} \frac{1}{N(\varepsilon)^k} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right)^k} = \varepsilon.$$

e) $\left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ ist keine rationale Nullfolge, denn für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt

$$\left|\frac{n^3}{n^2+1}\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{n^3}{n^2+1} \geq \frac{n^2}{n^2+1} \geq \frac{n^2}{n^2+n^2} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

f) $\left\{\frac{n+1}{n^4+n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ ist eine rationale Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so erfüllt $N(\varepsilon) > \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}}$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die gewünschte Eigenschaft:

$$\left|\frac{n+1}{n^4+n}\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{n+1}{n^4+n} < \frac{n+1}{n^4} = \frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)^3}+\frac{1}{N(\varepsilon)^4} \overset{\frac{2}{\varepsilon}<N^3\leq N^4}{<} \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}}+\frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

g) $\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist eine rationale Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so erfüllt $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon^k}$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die gewünschte Eigenschaft:

$$\left|\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right| \overset{n\geq 0}{=} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \overset{n\geq N(\varepsilon)}{\leq} \frac{1}{\sqrt[k]{N(\varepsilon)}} < \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon^k}}} = \varepsilon.$$

□

Aufgabe 9 (3) *Rechenregeln für konvergente Folgen*
Es seinen $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ und $\{b_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ zwei konvergente reelle Zahlenfolgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie die bekannten "Rechenregeln" für konvergente Folgen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

e) Falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

f) Falls $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

h) Für eine beliebige Folge reeller Zahlen $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

(Diese Aussage ist praktisch bei der Berechnung von Grenzwerten alternierender Nullfolgen.)

Lösung.
Sei $\varepsilon > 0$ für alle Teilaufgaben.

a) Da die Folge konstant ist gilt offensichtlicherweise für alle $\varepsilon > 0$ mit $N = 1$

$$|c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Vorüberlegung für b) und c):
Da beide Folgen konvergent sind, existieren insbesondere für $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ bei beiden Folgen ein $N_1 \in \mathbb{N}$, bzw. $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad \wedge \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2.$$

Da diese Ungleichungen für alle n größer als das jeweilige N gelten, gilt für $N := max\,\{N_1, N_2\}$

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N.$$

b) Dieses N weißt nun auch die Konvergenz der Summenfolge nach, denn es gilt

$$\begin{aligned} |(a + b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \\ &\overset{Dreiecksungl.}{\leq} |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

c) Dasselbe N tut es auch für die Differenzfolge, denn es gilt

$$\begin{aligned} |(a - b) - (a_n - b_n)| = |(a - a_n) + (b_n - b)| &\overset{Dreiecksungl.}{\leq} |a - a_n| + |b_n - b| \\ = |a - a_n| + |b - b_n| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

d) Bei der Produktfolge ist die Sache etwas komplizierter. Wie wir in der abschließenden Abschätzung sehen werden, müssen wir uns hier andere Vorüberlegungen machen, die wir zur Übersicht durchnummerieren.
Zunächst ist $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ als konvergente Folge durch ein $K \in \mathbb{N}$ beschränkt, es gilt also

$$|a_n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Aus der Konvergenz von $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ und $\dfrac{\varepsilon}{2\,|b| + 1} > 0$ folgt[1] wiederum, dass es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2\,|b| + 1} \quad \forall n \geq N_1 \tag{2}$$

[1] Die "+1" versucht den Problemfall b = 0 zu umgehen.

geben muss.
Aus demselben Grund findet man für $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq N_2. \tag{3}$$

Mit derselben Begründung wie in a) und b) gelten jetzt für $N := max\{N_1, N_2\}$ beide Abschätzungen (2) und (3) und wir können endlich zeigen

$$\begin{aligned}
|ab - a_n b_n| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| = |(a - a_n)b + a_n(b - b_n)| \\
&\leq |(a - a_n)b| + |a_n(b - b_n)| = |a - a_n||b| + |a_n||b - b_n| \\
&\overset{(1)}{<} |a - a_n||b| + K|b - b_n| \overset{(3)}{<} |a - a_n||b| + K\frac{\varepsilon}{2K} = |a - a_n||b| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2\,|b| + 1}|b| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2\,|b|}|b| + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N
\end{aligned}$$

e) Sei $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Für diesen Fall genügt es $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b\,n} = \frac{1}{b}$ zu zeigen, mit c) folgt dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{c)}{=} \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \overset{d)}{=} a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Auch hier brauchen wir einige Vorüberlegungen, die sich aus der darauffolgenden Abschätzung ergeben.[2]
Zunächst muss man sich klarmachen, dass es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ gibt, für das gilt

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N_1. \tag{4}$$

Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: Da $\{b_n\}_{n=1,2,\ldots}$ konvergent und $\frac{|b|}{2} > 0$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b - b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N_1.$$

Mit der zweiten Dreiecksungleichung folgt damit aber

$$|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N_1$$

und Umstellen liefert uns (4).
Genauso können wir mit der Konvergenz unserer Folge wegen $\frac{\varepsilon b^2}{2} > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ finden, für das

$$|b - b_n| < \frac{\varepsilon b^2}{2} \quad \forall n \geq N_2 \tag{5}$$

gilt. Durch Setzung von $N := max\{N_1, N_2\}$ gelten wieder beide Ungleichungen (4) und (5) für dieses N und es folgt:

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b\,n}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n \cdot b|} \overset{(4)}{<} \frac{|b - b_n|}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{2\,|b - b_n|}{b^2} \overset{(5)}{<} \frac{2\frac{\varepsilon b^2}{2}}{b^2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

[2] Bei solchen Aufgaben beginnt man allgemein immer mit der Abschätzung/Ungleichung, die man zeigen will und versucht in dieser Ausdrücke zu erzeugen, die man bereits aus den Voraussetzungen abzuschätzen weiß.

f) Sei also $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wie in e) bereits gezeigt gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N_1.$$

Da beide Seiten der Ungleichung positiv sind, gilt für dieses N_1 aber auch

$$\sqrt{|b_n|} \overset{b_n \geq 0}{=} \sqrt{b_n} > \sqrt{\frac{|b|}{2}} > \frac{\sqrt{b}}{2} \quad \forall n \geq N_1. \tag{6}$$

Außerdem folgt aus der Konvergenz von $\{b_n\}_{n=1,2,...}$ und $\frac{3\sqrt{b}\cdot\varepsilon}{2} > 0$,[3] dass es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ geben muss mit

$$|b - b_n| < \frac{3\sqrt{b}\cdot\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2 \tag{7}$$

Für $N := max\{N_1, N_2\}$ gelten wieder (6) und (7) und wir können abschätzen:

$$\left|\sqrt{b} - \sqrt{b_n}\right| = \left|(\sqrt{b} - \sqrt{b_n}) \cdot \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b_n}}{\sqrt{b} + \sqrt{b_n}}\right| = \left|\frac{b - b_n}{\sqrt{b} + \sqrt{b_n}}\right|$$

$$= \frac{|b - b_n|}{\sqrt{b} + \sqrt{b_n}} \overset{(6)}{<} \frac{|b - b_n|}{\sqrt{b} + \frac{\sqrt{b}}{2}} = |b - b_n| \cdot \frac{2}{3\sqrt{b}} \overset{(7)}{<} \frac{3\sqrt{b}\cdot\varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{b}} = \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

g) Diese Aussage folgt direkt aus der inversen Dreiecksungleichung mit

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

h) Da $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$||x_n| - 0| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

für dieses N gilt damit aber auch

$$||x_n| - 0| = ||x_n|| = |x_n| = |x_n - 0| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

□

[3] Falls b = 0 folgt die Konvergenz aus der Beschränktheit der Ursprungsfolge.

Aufgabe 10 (2-3) *Die Bernoulli-Ungleichung*

i) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x \geq -1$ gilt

$$(x+1)^n \geq 1 + nx.$$

ii) Folgern Sie nun, dass für $y \in (1, \infty)$ die Folge $\{y^n\}_{n=1,2,\ldots}$ nach oben hin unbeschränkt ist, d.h. zu jedem $K > 0$ existiert ein $N(K) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$y^n > K \qquad \forall n \geq N(K).$$

iii) Folgern Sie daraus schließlich, dass für $y \in (0, 1)$ die Folge $\{y^n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine reelle Nullfolge ist, dass also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass

$$|y^n| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

iv) Folgern Sie außerdem aus ii), dass für jede positive reelle Zahle $c \in \mathbb{R}, c > 0$ die zugehörige Wurzelfolge $\{\sqrt[n]{c}\}_{n=1,2,\ldots}$ gegen 1 konvergiert, also das gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \left|\sqrt[n]{c} - 1\right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst den Fall $c \geq 1$ und führen Sie den 2. Fall $0 < c < 1$ darauf zurück.

Lösung.

i) Sei $x \geq -1$. Diese Aussage beweist man am besten mit vollständiger Induktion. Induktionsanfang und Behauptung sind klar.
Induktionsschritt: $n \Rightarrow n+1$

$$(x+1)^{n+1} = (x+1)^n(x+1) \geq (1+nx)(x+1) = nx^2 + (n+1)x + 1 \overset{x^2, n \geq 0}{\geq} (n+1)x + 1$$

ii) Sei $y \in (1, \infty)$ und $K > 0$. Dann erfüllt $N(K) > \frac{K}{y-1}$ obige Bedingung, denn es gilt

$$y^n = ((y-1)+1)^n \overset{y-1 \geq -1;\ i)}{\geq} 1 + n(y-1) > n(y-1) \geq N(\varepsilon)(y-1) \overset{y>1}{>} \frac{K}{y-1}(y-1) = K$$

iii) Sei also nun $y \in (0, 1)$ und $\varepsilon > 0$.
Da $\frac{1}{y} \in (1, \infty)$ gilt laut ii), dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$\left(\frac{1}{y}\right)^n > \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Da dies aber für alle positiven reellen Zahlen gilt, muss es insbesondere auch für $\widetilde{\varepsilon} := \frac{1}{\varepsilon} > 0$ ein $\widetilde{N} \in \mathbb{N}$ geben, sodass gilt

$$\left(\frac{1}{y}\right)^n > \widetilde{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall n \geq \widetilde{N}.$$

für dieses $\widetilde{N}$ gilt nach Umformung damit aber auch

$$(|y^n| =) y^n < \varepsilon \qquad \forall n \geq \widetilde{N}.$$

iv) Sei $\varepsilon > 0$.
1. Fall: $c \geq 1$
Da $(1+\varepsilon) \in (1, \infty)$ existiert laut ii) für $K = c$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|(1+\varepsilon)^n| = (1+\varepsilon)^n > c \qquad \forall n \geq N$$

Umstellen liefert für dieses N die Behauptung

$$\sqrt[n]{c} - 1 < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

$$\overset{c\geq 1}{\Rightarrow} \left|\sqrt[n]{c} - 1\right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

2. Fall: $0 < c < 1$
Diesen Fall können wir auf den ersten zurückführen. Setze wie in iii) $a := \frac{1}{c} \in (1, \infty)$, so wissen wir aus dem 1. Fall, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

damit können wir nun geeignet abschätzen

$$\left|\sqrt[n]{c} - 1\right| = \left|\sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1\right| = \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1\right| = \left|\frac{1 - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right| \left|1 - \sqrt[n]{a}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \left|\sqrt[n]{a} - 1\right| \overset{a>1}{<} \left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

□

Aufgabe 11 (3) *Sandwich-Lemma*
Es seien $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ und $\{y_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ konvergente reelle Zahlenfolgen mit:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) Gilt $x_n \leq y_n$ für *fast* [4] alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x \leq y$.

ii) Zeigen Sie durch die Auswahl geeigneter Folgen, dass die analoge Aussage mit “$<$” anstelle von “$\leq$” allgemein nicht gilt.

iii) Ist $\{z_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ eine Folge (von der man zunächst nicht weiß, dass sie konvergiert) mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und gilt $x = y$, so konvergiert $\{z_n\}_{n=1,2,\ldots}$ gegen x.

iv) Verwenden Sie iii) um folgende Aussagen zu beweisen:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = 0$ mit $q \in \mathbb{Q}^+$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$, für $z \in \mathbb{R}$ mit $z > 1$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

[4] Eine Aussage A(n) gilt für fast alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, wenn es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, ab der sie gilt. In Zeichen:

$$\exists N \in \mathbb{N} : A(n) \quad \forall n \geq N$$

Lösung.

i) Es gelten also die genannten Voraussetzungen sowie $x_n \leq y_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit
$$x_n \leq y_n \quad \forall n \geq N_1$$
Angenommen, es würde außerdem $x > y$ (bzw. $x - y > 0$) gelten.
Die Konvergenz der beiden Folgen übersetzt sich in
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2, N_3 \in \mathbb{N} :$$
$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2 \quad \wedge \quad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_3$$
Da diese drei Aussagen für alle n, die größer als das gegebene N sind gelten soll, können wir sie mithilfe von $N := max\{N_1, N_2, N3\}$ zusammenfassen zu
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x - x_n| < \varepsilon \quad \wedge \quad |y - y_n| < \varepsilon \quad \wedge \quad x_n \leq y_n \qquad \forall n \geq N$$
Dies wollen wir nun zum Widerspruch führen. Da wir dabei unsere Voraussetzung nutzen wollen/müssen, versuchen wir diese in den obigen Ungleichunge zu erzeugen. Umformen der Beträge liefert
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : -\varepsilon < x - x_n < \varepsilon \quad \wedge \quad -\varepsilon < y - y_n < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$
bzw.
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < \varepsilon + x \quad \wedge \quad y - \varepsilon < y_n < \varepsilon + y \qquad \forall n \geq N$$
Woraus sich die Ungleichungskette
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n \overset{Vor.}{\leq} y_n < y + \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$
ergibt. Die letzte noch nicht verwendete Voraussetzung beinhaltet den Term $x - y$, also versuchen wir diesen auch hier zu erzeugen. Eine letzte Umformung liefert
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x - y < 2\varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$
Und hier entsteht nun der Widerspruch. Diese Aussage soll immer noch für alle positiven reelle Zahlen gelten, also insbesondere auch für $\varepsilon = \dfrac{x-y}{2} > 0$. Einsetzen liefert aber
$$\exists N \in \mathbb{N} : x - y > 2\varepsilon = 2\frac{x-y}{2} = x - y \ ↯ \qquad \forall n \geq N.$$
Und damit ist unsere Annahme falsch und der Beweis abgeschlossen.

ii) Ein einfaches Gegenbeispiel sind hier die Folgen $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$ und $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}_{n=1,2,\ldots}$, denn es gilt zwar
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
aber gleichzeitig
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

iii) Gelte also zusätzlich zu obigen Voraussetzungen $x_n \leq z_n \leq y_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $x = y$.
Ähnlich wie beim Beweis von i) wissen wir wegen der Konvergenz der ersten beiden Folgen, dass gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n \overset{Vor.}{\leq} y_n < y + \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

Unter Berücksichtigung unserer Voraussetzungen folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n \overset{Vor.}{\leq} z_n \overset{Vor.}{\leq} y_n < x + \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

und daraus

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : -\varepsilon < x - z_n < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

was äquivalent ist zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |x - z_n| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

also unserer Behauptung.

iv) (a) Sei $q \in \mathbb{Q}^+$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k - 1 \leq q \leq k$$

daraus folgt

$$\frac{1}{n^{k-1}} \leq \frac{1}{n^q} \leq \frac{1}{n^k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und damit folgt aus iii) mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^(k-1)} = 0 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^q} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

die Behauptung.

(b) Sei $z \in \mathbb{R}$ mit $z > 1$ beliebig.
Dann gibt es zu diesem fest gewählten z ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$M > z$$

damit können wir aber abschätzen

$$\frac{z^n}{n!} = \frac{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot M} \cdot \frac{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}{(M+1) \cdot ((M+2) \cdot \ldots \cdot n}$$

$$\leq \frac{z^M}{M!} \cdot \frac{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}{(M+1) \cdot \ldots \cdot (M+1)} = \frac{z^M}{M!} \cdot \frac{z^{n-M}}{(M+1)^{n-M}}$$

$$= \frac{z^M}{M!} \cdot \frac{z^n}{(M+1)^n} \cdot \frac{(M+1)^M}{z^M} = \frac{(M+1)^M}{M!} \cdot \left(\frac{z}{M+1}\right)^n \qquad \forall n \geq M+1$$

diese Abschätzung gilt somit für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und mit iii) folgt schließlich die Behauptung

$$0 = \lim_{n \to \infty} 0 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{z^n}{n!} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{(M+1)^M}{M!} \cdot \left(\frac{z}{M+1}\right)^n \overset{\frac{z}{M+1}<1}{=} 0$$

Anmerkung: Mit kleinen Anpassungen kann man diesen Beweis auch für $z < -1$ führen, sodass der Grenzwert auch für $|z| > 1$ gilt.

(c) Genauso wie in (b) können wir hier die Folge umschreiben zu

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

und mit iii) folgt

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

□

Aufgabe 12 (3-4) *Zwei weitere grundlegende Grenzwerte*
Beweisen Sie die folgenden allgemeinen Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *Tipp:* Binomischer Lehrsatz zur Abschätzung.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ mit $k \in \mathbb{N}, z > 1$
Tipp: Betrachte $x := z - 1$ und verwende auch hier den binomischen Lehrsatz zur Abschätzung.

Lösung.

a) Sei $\varepsilon > 0$. Per Definition des Grenzwertes suchen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \overset{\sqrt[n]{n}\geq 1}{=} \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

bzw. nach Umstellen

$$n < (1+\varepsilon)^n \qquad \forall n \geq N.$$

Intuitiv ahnen/vermuten (und in (b) beweisen wir außerdem), dass die Exponentialfunktion mit Basis > 1 schneller wächst, also muss es ein solches N geben. Wie finden wir es aber? Dafür müssen wir den Ausdruck auf der rechten Seite wiederum abschätzen. Dabei hilft der binomische Lehrsatz.

$$n \overset{!}{<} (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \overset{\varepsilon, \binom{n}{k} > 0}{\leq} \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$$

Dabei zeigt Ausprobieren, dass der dritte Summand ausreichend sind, denn wir können so zeigen

$$n < \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 < n$$

und damit finden wir $N > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ sodass die letzte Ungleichung für alle $n \geq N$ gilt. Wir können somit für alle $n \geq N$ abschätzen:

$$\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 < n$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k = (1+\varepsilon)^n$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $z > 1$. Setze $x := z - 1 > 0$ so können wir unsere Folgenglieder umschreiben zu

$$\frac{n^k}{z^n} = \frac{n^k}{z^n} = \frac{n^k}{(x+1)^n} = \frac{n^k}{\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da wir diesen Ausdruck wieder nach oben durch eine Nullfolge abschätzen wollen, können wir im Nenner beliebig viele Summanden (bis auf einen) weglassen (der entstehende Ausdruck ist auf jeden Fall nicht kleiner, weil jeder Summand positiv ist und die Summe damit nicht größer wird). Damit wir eine Nullfolge erhalten, wollen wir einen Summanden mit Exponent größer k dafür nehmen, also setzen wir $N_1 := k + 1 \in \mathbb{N}$ und schätzen

$$\frac{n^k}{z^n} = \frac{n^k}{\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l} \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} x^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k-Faktoren}}{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)}_{(k+1)-Faktoren}}$$

$$= \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k-Faktoren}}{\underbrace{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)}_{k-Faktoren}} \cdot \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq N_1$$

Jetzt sind wir fast am Ziel. Der erste Faktor ist konstant und hinten steht eine Nullfolge. Nun müssen wir nur noch eine Abschätzung für den mittleren Faktor finden. Dazu setzen wir $N := max\{N_1, 2k\}$, denn dann gilt wegen

$$(n - m) \geq \frac{n}{2}, \forall n \geq N_2 \wedge m \in \{1, \ldots, k\}$$

die folgende Abschätzung

$$\frac{n^k}{z^n} \leq \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(k+1)! \cdot 2^k}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \geq N.$$

Diese Abschätzung gilt somit für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt mit iii) die Behauptung

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)! \cdot 2^k}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

Anmerkung: Mit kleinen Anpassungen kann man diesen Beweis auch für $z < -1$ führen, sodass der Grenzwert auch für $|z| > 1$ gilt.

$\square$

Aufgabe 13 (2) *Unvollständigkeit von* $\mathbb{Q}$

i) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Q}$ jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

ii) Zeichen Sie nun durch Auswahl eines geeigneten Gegenbeispiels, dass die Umkehrung dieser Aussage in $\mathbb{Q}$ allgemein nicht gilt.

Anmerkung: Mengen, auf denen diese Äquivalenz gilt, nennt man *vollständig.*

Lösung.

i) Sei $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subseteq \mathbb{Q}$ eine gegen $x \in \mathbb{Q}$ konvergente Folge rationaler Zahlen. Sei außerdem $\varepsilon > 0$.
Dann gibt es wegen der Konvergenz für $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass gilt

$$|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$$

$$|x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq N$$

Dieses N weist jedoch auch nach, dass $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Cauchyfolge ist, denn es gilt

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

ii) Die eventuell aus dem Heron-Verfahren bekannte rekursive Folge

$$x_0 := 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

ist zwar eine rationale Cauchyfolge[5], aber da ihr Grenzwert $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, konvergiert die Folge nicht in $\mathbb{Q}$.

□

Aufgabe 14 (1) *Bestimmen von Teilfolgen*
Betrachten Sie die Zahlenfolge

$$\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R} \text{ mit } x_n := \frac{3n}{(-2)^n}.$$

i) Beweisen Sie, dass $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Nullfolge ist.

ii) Bestimmen Sie eine streng monoton fallende und eine streng monoton wachsende Teilfolge.

Lösung.

i) Da der Betrag der Folge gegen 0 konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{3n}{(-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2^n} \overset{A12b)}{=} 3 \cdot 0 = 0$$

folgt mit Aufgabe 9 h) die Behauptung.

[5] Zum Nachweis dieser Eigenschaft zeige zunächst, dass $\left\{x_n^2\right\}_{n=1,2,\ldots}$ in $\mathbb{Q}$ gegen 2 konvergiert und schätze dann $|x_m - x_n|$ nach oben mit $|x_m^2 - x_n^2|$ ab.

ii) Die Folge der geradzahligen Indizes ($n_k := 2k, \forall k \in \mathbb{N}$)

$$\left\{\frac{3n_k}{(-2)^{n_k}}\right\}_{k=1,2,\ldots} = \left\{\frac{6k}{4^k}\right\}_{k=1,2,\ldots} \subset \left\{\frac{3n}{(-2)^n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$$

ist streng monoton fallend, die der ungeraden Indizes ($n_l := 2l - 1, \forall l \in \mathbb{N}$)

$$\left\{\frac{3n_l}{(-2)^{n_l}}\right\}_{k=1,2,\ldots} = \left\{\frac{6-12l}{4^l}\right\}_{k=1,2,\ldots} \subset \left\{\frac{3n}{(-2)^n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$$

ist streng monoton steigend.

□

Aufgabe 15 (1) *Häufungsstellen von Zahlenfolgen I*
Bestimmen Sie alle Häufungsstellen der Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2 - \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n - n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Geben Sie dazu explizit konvergente Teilfolgen an.

Lösung.
Die Definition der Folge legt es nahe, zunächst die geraden und die ungeraden Folgenindizes zu betrachten. Als erstes betrachten wir also die Teilfolge der geraden Indizes mit $n_i = 2i, i \in \mathbb{N}$

$$2 - \frac{1}{n_i} = 2 - \frac{1}{2i} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 2$$

Damit erhalten wir als erste Häufungsstelle 2.
Danach betrachten wir die Teilfolge der ungeraden Indizes mit $n_j = 2j - 1, u \in \mathbb{N}$

$$(-1)^{\frac{n_j-1}{2}} n_j - n_j = (-1)^{\frac{2j-1-1}{2}}(2j-1) - (2j-1) = (-1)^{j-1}(2j-1) - (2j-1) = ((-1)^{j-1} - 1)(2j-1)$$

Da diese Folge wieder alternierend ist, schauen wir wieder deren gerade und ungerade Indizes an.
Die geraden erhalten wir mit $n_{j_k} = 2j_k - 1 = 2(2k) - 1 = 4k - 1, k \in \mathbb{N}$

$$(-1)^{\frac{n_{j_k}-1}{2}} n_{j_k} - n_{j_k} = ((-1)^{j_k-1} - 1)(2j_k - 1) = ((-1)^{(2k)-1} - 1)(2(2k) - 1)$$
$$= (-1-1)(4k-1) = -8k + 2 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Diese divergiert gegen $-\infty$, ein uneigentlicher Grenzwert, welcher je nach Definition zu den Häufungsstellen zählt oder nicht.
Zuletzt noch die ungeraden Indizes unserer zweiten Teilfolge. Diese bekommen wir mit $n_{j_l} = 2j_l - 1 = 2(2l - 1) - 1 = 4l - 3, l \in \mathbb{N}$

$$(-1)^{\frac{n_{j_l}-1}{2}} n_{j_l} - n_{j_l} = ((-1)^{j_l-1} - 1)(2j_l - 1) = ((-1)^{(2l-1)-1} - 1)(2(2l - 1) - 1)$$
$$= (1-1)(4l-3) = 0 \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

womit wir den zweiten/dritten und letzten Häufungspunkt gefunden haben.
Dass die untersuchten Folgen keine weitere gegen andere Grenzwerte konvergenten Teilfolgen haben können wird in Aufgabe 22 bewiesen. Die Idee hinter dem Beweis ist aber

einfach: Jede Teil(teil)folge der untersuchten Teilfolgen muss unendlich viele Folgenglieder mit dieser Folge gemeinsam haben, also kann sie nicht gegen einen anderen Grenzwert als diese Folge konvergieren. Da wir insbesondere anfangs von den geraden und den ungeraden Folgengliedern ausgegangen sind (die zusammen die natürlichen Zahlen als Ganzes ergeben) haben wir alle möglichen Teilfolgen in unsere Überlegung mit einbezogen und müssen somit alle Häufungspunkte gefunden haben.
Es ergibt sich also die Menge der Häufungspunkt von $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ als $\{-\infty, 0, 2\}$. □

Aufgabe 16 (2) *Häufungsstellen von Zahlenfolgen II*
Bestimmen Sie alle Häufungsstellen der folgenden Zahlenfolgen

i) $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n := (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

ii) $\{b_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ mit $b_n := (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

iii) $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ mit $c_n := (-1)^{n+1} \dfrac{6n^2+17n}{5n^3+7}$

iv) $\{d_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ mit $d_n := \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$

Lösung.
Da alle aufgeführten Folgen alternierend sind, betrachten wir zunächst immer die Teilfolgen der geraden und die der ungeraden Indizes:

i) Teilfolge der geraden Indizes mit $n_i = 2i, i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n_i} &= (-1)^{\frac{1}{2}n_i(n_i+1)} = (-1)^{\frac{1}{2}2i(2i+1)} = (-1)^{i(2i+1)} \\ &= (-1)^i \cdot (-1)^{2i+1} = (-1)^i \cdot (-1) = (-1)^{i+1} \end{aligned}$$

Da diese Folge wieder alternierend ist, könnten wir wieder deren gerade und ungerade Indizes anschauen, allerdings kann man hier direkt erkennen,[6] dass für gerade i die Folge konstant -1 und für ungerade i die Folge konstant 1 ist, weshalb diese beiden Werte sich als Häufungspunkte ergeben.
Es bleibt noch von der ursprünglichen Folge die Teilfolge der ungeraden Indizes mit $n_j = 2j-1, i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n_j} &= (-1)^{\frac{1}{2}n_j(n_j+1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(2j-1)(2j-1+1)} = (-1)^{j(2j-1)} \\ &= (-1)^j \cdot (-1)^{2j-1} = (-1)^j \cdot (-1) = (-1)^{j+1} \end{aligned}$$

Also dieselbe Teilfolge wie der der geraden Indizes, weswegen wir hierfür auch wieder die beiden obigen Häufungsstellen und damit die Menge aller Häfungsstellen $\{-1, 1\}$ erhalten. Die Erklärung, warum damit alle Häufungsstellen erfasst wurden findet sich in Aufgabe 10 bzw. Aufgabe 22 i) und ii).

ii) Menge der Häufungsstellen $\{-1, 1\}$.

iii) Menge der Häufungsstellen $\{0\}$.

iv) Menge der Häufungsstellen $\left\{\frac{1}{e}, e\right\}$.

[6] Falls man doch Zweifel an dieser Aussage haben sollte, kann man natürlich trotzdem die Teilfolgen untersuchen.

$\square$

Aufgabe 17 (1-2) *Infimum und Supremum I*
Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der Menge

$$M = \{5 + \frac{2}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

auf direktem Weg mithilfe der Definitionen der Begriffe.
Sind diese Werte auch Maxima bzw. Minima?

Lösung.
Grob gesagt ist das Infimum einer Menge ihre größte untere Schranke. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ muss eine Zahl $s := \inf(M) \in \mathbb{R}$ also zwei Bedingungen erfüllen, wenn sie das Infimum von M sein soll, nämlich:

1. $\forall x \in M : s \leq x$ (s ist untere Schranke von M)
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M : y \leq s + \varepsilon$ (s ist größte untere Schranke von M)[7]

analog ist die kleinste obere Schranke, das Supremum $S := \sup(M) \in \mathbb{R}$ von M definiert als eine Zahl mit den Eigenschaften

1. $\forall x \in M : S \geq x$ (S ist obere Schranke von M)
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M : S - \varepsilon \leq y$ (S ist kleinste obere Schranke von M)[8]

Doch genug der Theorie, kommen wir zur Aufgabe.
Die Elemente von M entsprechen den Gliedern der Folge $\left\{5 + \dfrac{2}{n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$. Diese Folge ist streng monoton fallend (Beweis: Induktion), also ergibt sich als Vermutung $\sup M = 7$. Wir überprüfen die beiden Bedingungen

1. $\forall x \in M : 7 \geq x$ ist wahr, da gilt
   Sei $x \in M$.
   $\Rightarrow \quad x = 5 + \frac{2}{n} \overset{1 \leq n}{\leq} 5 + \frac{2}{1} = 7$, für $n \in \mathbb{N}$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M : 7 - \varepsilon \leq y$ ist auch wahr, denn
   Sei $\varepsilon > 0$.
   Dann ist der Ausdruck “$\exists y \in M : 7 - \varepsilon \leq y$” äquivalent zu “$\exists n \in \mathbb{N} : 7 - \varepsilon \leq 5 + \frac{2}{n}$”.
   Umformen liefert die Aussage
   $$-2 \leq (\varepsilon - 2)n$$
   bei der wir mit $n = 1$ die Existenz eines solchen n nachweisen.[9] Da außerdem $7 \in M$ ist 7 sogar Maximum von M.

Mit derselben Überlegung wie oben ergibt sich der Grenzwert der Folge als vermutetes Infimum, also $\inf M = 5$. Wir überprüfen wieder

[7] Wortwörtlich liest sich diese Aussage als: Sobald ich eine (minimal) größere Schranke als s (also eine Zahl s + ε) betrachte finde ich eine Zahl y in meiner Menge M, für die $s + \varepsilon$ keine untere Schranke mehr ist.

[8] Analog zum Infimum: Sobald ich eine (minimal) kleinere Schranke als S (also eine Zahl S - ε) betrachte finde ich eine Zahl y in meiner Menge M, für die $s - \varepsilon$ keine obere Schranke mehr ist.

[9] Da wir $7 \in M$ wissen hätten wir nach 1. schon aufhören können, da 7 damit Maximum und somit insbesondere Supremum sein muss, aber ein bisschen Übung kann nicht schaden.

1. $\forall x \in M : 5 \leq x$ stimmt, denn
   Sei $x \in M$.
   $\Rightarrow \quad x = 5 + \frac{2}{n} \leq 5 + 0 = 5$, für $n \in \mathbb{N}$.

2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in M : y \leq 5 + \varepsilon$ ist auch wahr, denn
   Sei $\varepsilon > 0$.
   Dann ist der Ausdruck “$\exists y \in M : y \leq 5+\varepsilon$” äquivalent zu “$\exists n \in M : 5+\frac{2}{n} \leq 5+\varepsilon$”.
   Umformen liefert die Aussage
   $$\frac{2}{\varepsilon} \leq n$$
   und da $\frac{2}{\varepsilon}$ konstant ist finden wir nach dem Archmedischen Axiom immer ein solches $n \in \mathbb{N}$. Da $5 \notin M$ ist 5 nur Infimum von M und es gibt somit kein Minimum.

$\square$

Aufgabe 18 (2) *Beispiele Infimum/Supremum*
Geben Sie (ohne Beweis)

i) eine abzählbare Menge $C \subset \mathbb{R}$

ii) eine überabzählbare Menge $C \subset \mathbb{R}$

an, jeweils mit den vier Eigenschaften

$$0 \in C, \qquad 1 \notin C, \qquad \inf C = 0, \qquad \sup C = 1$$

Lösung.

i) Z.B. $C = \left\{\frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$

ii) Z.B. $C = [0, 1) \subset \mathbb{R}$

□

Aufgabe 19 (2) *Infimum und Supremum II*
Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen beschränkt sind und geben Sie gegebenenfalls Infimum und Supremum an. Handelt es sich sogar um ein Minimum bzw. Maximum?

i) $A := \left\{\dfrac{2n+3}{3-4n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

ii) $B := \left\{\frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

iii) $C := \left\{\dfrac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

iv) $D := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < x + 2\right\}$

v) $E := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 10x \leq 24\right\}$

vi) $F := \left\{\dfrac{m+n}{m \cdot n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$

Lösung.

i) $\min(A) = \inf(A) = -5,\ \sup(A) = -\frac{1}{2}$, kein Maximum.

ii) $\inf(B) = 0,\ \max(B) = \sup(B) = 1$, kein Minimum.

iii) $\min(A) = \inf(A) = 0,\ \sup(A) = 1$ kein Maximum.

iv) $D = (-1, 2) \Rightarrow \inf(D) = -1, \sup(D) = 2$, weder Minimum noch Maximum.

v) $E = (-2, 12) \Rightarrow \min(E) = \inf(E) = -2, \max(E) = \sup(E) = 12$.

vi) $\inf(F) = 0, \max(F) = 2$, kein Minimum.

□

Aufgabe 20 (1) *Limes Inferior/Superior I*
Ermitteln Sie Limes inferior und Limes superior der folgenden Zahlenfolgen

i) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1,2,\ldots}$

ii) $\left\{\dfrac{n}{2}\right\}_{n=1,2,\ldots}$

iii) $\left\{\frac{1}{n} + [1 + (-1)^n] \cdot n\right\}_{n=1,2,...}$

Lösung.
Da der Limes Inferior/Superior das Infimum/Supremum der Menge der Häufungspunkte einer Folge ist, müssen zunächst diese bestimmt werden.

i) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1,2,...}$
Diese Folge ist konvergent gegen 0 und hat damit auch nur einen Häufungspunkt (vgl. A 22). Daraus folgt direkt:

$$\liminf \frac{(-1)^n}{n} = \limsup \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

ii) $\left\{\frac{n}{2}\right\}_{n=1,2,...}$
Diese Folge divergiert gegen ∞ und damit auch alle ihre Teilfolgen. Genauso wie in i) folgt

$$\liminf \frac{n}{2} = \limsup \frac{n}{2} = \infty.$$

iii) $\left\{\frac{1}{n} + [1 + (-1)^n] \cdot n\right\}_{n=1,2,...}$
Da diese Folge alternierend ist zerlegen wir sie in Teilfolgen von geraden und ungeraden Folgenindizes. Es ergeben sich die Häufungspunkt $\{0, \infty\}$ und damit

$$\liminf \frac{1}{n} + [1 + (-1)^n] \cdot n = 0, \qquad \liminf \frac{1}{n} + [1 + (-1)^n] \cdot n = \infty.$$

□

Aufgabe 21 (2) *Limes Inferior/Superior II*
Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Folgen alle Häufungsstellen und geben Sie (soweit vorhanden) den Limes superior und den Limes inferior an.

i) $\{a_n\}_{n=1,2,...}$ für $a_n := \frac{1}{n^3} + (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{n^2+5}$

ii) $\{b_n\}_{n=1,2,...}$ für $b_n := 2 \cdot (-1)^n + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

iii) $\{c_n\}_{n=1,2,...}$ für $c_n := \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-1)^n}$

iv) $\{d_n\}_{n=1,2,...} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \ldots\}$

Lösung.

i) Die Häufungsstellen von $\{a_n\}_{n=1,2,...}$ lauten $\{-1, 1\}$ und daher gilt

$$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1.$$

ii) Nach zweimaliger Unterteilung in gerad- und ungeradzahlige Folgenindizes ergeben sich die Häufungspunkte von $\{b_n\}_{n=1,2,...}$ mit $\{-5, -1, 1, 5\}$. Es folgt

$$\liminf a_n = -5, \quad \limsup a_n = 5.$$

iii) Für $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ ergibt sich als Grenzwert $\frac{1}{3}$ und damit auch

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \frac{1}{3}.$$

iv) Diese Folge besitzt als erstes Beispiel unendlich viele Häufungspunkte. Insbesondere ist die Menge der Häufungspunkt $\mathbb{N}$ und somit

$$\liminf a_n = 1, \quad \limsup a_n = \infty.$$

□

Aufgabe 22 (3-4) *Charakterisierung konvergenter Folgen*
Es seien $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahlenfolge und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Die Folge $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ konvergiert gegen x.

ii) Jede Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ konvergiert gegen x.

iii) Jede Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ hat eine gegen x konvergente Teilfolge.

iv) Die einzige Häufungsstelle von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ ist x.

v) Es gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = x = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Lösung.
Die Äquivalenz mehrerer Aussagen zeigt man am Besten durch einen Ringschluss.
i) $\Rightarrow$ ii):
Angenommen die Folge $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ konvergiere gegen $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt per Definition des Grenzwertes

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \quad |x - x_n| < \varepsilon$$

Sei nun $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ eine beliebige Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$. Wir müssen nun zeigen, dass $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ gegen x konvergiert.
Sei dazu noch $\varepsilon > 0$.
Per Definition einer Folge ist die Folge der Folgenindizes $\{n_k\}_{k=1,2,\ldots}$ streng monoton steigend, also gilt $n_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}$. Somit ist aber auch $n_k \geq N$ für alle $k \geq N$. Damit[10] gilt aber

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon \qquad \forall k \geq N$$

ii) $\Rightarrow$ iii):
Angenommen, jede Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ würde gegen x konvergieren.
Da jede Teilfolge eine (kanonische) Teilfolge von sich selbst ist, hätte damit auch jede Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine gegen x konvergente Teilfolge (sich selbst).
iii) $\Rightarrow$ iv):
Angenommen, jede Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ hätte eine gegen x konvergente Teilfolge.
Wir führen einen Widerspruchsbeweis, also nehmen wir an, es gäbe mehr als einen Häufungspunkt, also zwei Teilfolgen von $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$, die nicht beide gegen x konvergieren.

$$\{x_{n_i}\}_{i=1,2,\ldots} \subseteq \{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \quad \wedge \quad \left\{x_{n_j}\right\}_{j=1,2,\ldots} \subseteq \{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$$

[10] Die Idee hinter dem Beweis ist, dass eine Teilfolge unendlich viele Folgenglieder mit der Ursprungsfolge gemeinsam haben muss, und wenn die Ursprungsfolge gegen einen Wert konvergiert, so liegen fast alle Werte in einer beliebig kleinen Umgebung um den Grenzwert. Das muss dann aber auch für die Teilfolge gelten.

mit

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x \neq \tilde{x} = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}.$$

Dann muss nach obigem Beweis (i) $\Rightarrow$ ii)) aber auch jede Teilfolge dieser beiden Teilfolgen gegen den jeweiligen Grenzwert konvergieren. Dann hätten wir aber eine Teilfolge (nämlich $\left\{x_{n_j}\right\}_{j=1,2,\dots}$) gefunden, die keine gegen x konvergente Teilfolge besitzt. $\lightning$
iv) $\Rightarrow$ v):
Angenommen, x sei die einzige Häufungsstelle von $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$.
Da der Limes Inferior und der Limes Superior das Infimum und Supremum der Häufungsstellenmenge sind folgt die Behauptung direkt.
v) $\Rightarrow$ i):
Es gelte also $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = x = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
Sei H die Menge der Häufungspunkte von $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ so folgt aus der Annahme $H = \{x\}$, da für alle $y \in H$ nach Definition von Limes Inferior und Limes Superior $x \leq y \leq x$ gelten muss. Da nur ein eindeutiger Häufungspunkt existiert muss die Folge selbst gegen diesen konvergieren und es gilt somit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$\square$

Aufgabe 23 (1) *Regel von L'Hospital I*
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{1-x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}, n\in\mathbb{N}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

Lösung.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$,
denn da $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ dürfen wir die Regel von L'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{1-x} = 2.$
Hier brauchen wir die Regel gar nicht, denn es gilt

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} 1+x = 2$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$, denn hier wären bei Einsetzen der Grenze Zähler und Nenner wieder 0, daher liefert L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1} = 0$$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$. Da hier Zähler und Nenner beide gegen ∞ divergieren dürfen wir auch wieder die Regel von L'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^x} = 0$$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ für $n\in\mathbb{N}$, denn Umschreiben liefert

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$$

und da wieder Zähler und Nenner beide gegen ∞ divergieren folgt nach n-maliger Anwendung der Regel

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0$$

vi) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, denn Umschreiben zeigt auch hier wieder

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

und da hier wieder Zähler und Nenner gegen $\pm\infty$ divergieren folgt mit L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

□

Aufgabe 24 (2) *Regel von L'Hospital II*
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x^x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\cot(x)}$

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - \cos^2(x)}{\sin(2x)}$

v) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln(\sin(2x))}$

vi) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{x^{\frac{1}{3}}}$

Lösung.

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)} \overset{23iv)}{=} e^0 = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\cot(x)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin(x)^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{\sin(x)^2}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} -2\sin(x)\cos(x) = 0$

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \dfrac{1}{3}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - \cos^2(x)}{\sin(2x)} = \dfrac{1}{2}$

v) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln(\sin(2x))} = 1$

vi) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$

□